UNIVERSITE PAUL SABATIER

Licence de Sciences Physiques et Chimiques

Année Universitaire 2008 – 2009

THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE- EXAMEN JUIN 2009- Session 2

(Durée 2 h)

I. Gaz parfait d'atomes à deux niveaux

On étudie un gaz constitué de N atomes identiques, indépendantes, de masse m, enfermé dans un réservoir de volume V et en contact avec un thermostat qui fixe la température T. On considère ces N molécules indiscernables.

On considère que le cortège électronique de chaque atome peut être dans deux états non-dégénérés, d'énergie proches $\varepsilon_1 = 0$ et $\varepsilon_2 = \Delta > 0$. Δ est de l'ordre de 10^{-4} eV. Il ya donc deux contributions à l'énergie de chaque atome : une contribution de l'énergie interne des états électroniques et une contribution de l'énergie cinétique.

1. Déterminer la fonction de partition interne z_i relative à un atome. Donner les probabilités P_1 et P_2 que l'atome soit dans l'état fondamental et dans l'état excité respectivement.
2. Déterminer la fonction de partition z_t de translation d'une molécule.
3. En déduire la fonction de partition z d'une molécule (les états électroniques et les états de translation sont indépendants les uns des autres).
4. En déduire la fonction de partition Z et l'énergie libre F du gaz.
5. Calculer l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ et l'entropie S du gaz en fonction de N, V et T.
6. Que deviennent les expressions de Z, $\langle E \rangle$ et S dans le domaine où $k_BT \ll \Delta$?
7. Que deviennent les expressions de Z, $\langle E \rangle$ et S dans le domaine où $k_BT \gg \Delta$ où $k_BT \gg \Delta$? En déduire la pression p et l'équation d'état.
8. Quelle est l'expression de la capacité thermique à volume constant C_V dans ces deux domaines ?
9. Peu-on comprendre simplement la différence entres les expressions obtenues dans ces deux domaines. Etant donné l'ordre de grandeur de Δ, ces deux cas limites sont-ils tous les deux réalistes ?

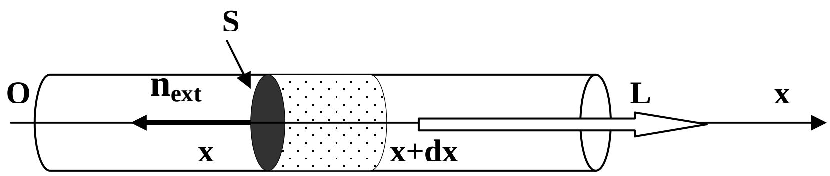
Rappel : 1 eV est équivalent à 11605 K, la température ambiante (293 K) est équivalente à 1/40 eV

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

II. Diffusion des particules dans un réacteur nucléaire

A. Equation de diffusion à l'intérieur du réacteur

On s'intéresse à la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe Ox de section droite S, s'étendant entre les abscisses 0 et L. Cette diffusion satisfait à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D indépendant de x. D'autre part du fait de réactions nucléaires entre les neutrons et la matière, des neutrons sont produits pendant une durée dt dans un élément de volume dV, il apparaît $dN^p = K\, n(x,t)dt\, dV$ neutrons avec $K=3.5\ 10^4 s^{-1}$. On admettra en première approximation que n doit s'annuler à tout instant aux extrémités du cylindre en x=0 et x=L. En revanche on supposera que n(x, t) ne s'annule pas à l'intérieur du solide. La diffusion des neutrons s'effectue dans le sens des x > 0. On rappelle que K et D sont >0.



1. Enoncer la loi de Fick en précisant les grandeurs physiques introduites et leurs unités SI.

2. Exprimer le flux du nombre de neutrons dN^r/dt reçus **algébriquement** par le volume élémentaire dV=Sdx entre les instants t et t+dt. (On rappelle sur la figure que S (section du cylindre) est une surface orientée suivant la normale extérieure $\mathbf{n}_{ext}$). Faire le bilan de la variation du nombre de neutrons dN/dt pendant dt à l'intérieur du volume dV=Sdx en tenant compte des nombres de neutrons produits dN^p et reçus dN^r.

3. En vous servant des rappels a et b, montrer que l'équation différentielle de la conservation du nombre total de neutrons à laquelle satisfait n(x,t) est :

$$\frac{dn(x,t)}{dt} = \ \mathrm{div}\, \overrightarrow{j_n} \ + K\, n(x,t)$$

4. En tenant compte de la loi de Fick, établir l'équation différentielle de la diffusion à laquelle satisfait n(x,t).

5. En vous servant du rappel c, déterminer n(x) en **régime stationnaire**. On posera $d = \sqrt{\frac{K}{D}}$. Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière L_s de L. Calculer L_s avec D = 22 SI.

B. Equation de diffusion à l'extérieur du réacteur

A l'extérieur du barreau de plutonium les neutrons diffusent dans une barre de graphite avec absorption suivant l'axe Ox. Un certain nombre de neutrons sont captés par le graphite au cours de la diffusion. Il disparaît, dans le volume élémentaire dV, $dN^d = C\, n(x,t)dt\, dV$ neutrons entre les instants t et t+dt où C est une constante. On supposera que le coefficient de diffusion D est constant.

1. Etablir l'équation de diffusion avec absorption en s'aidant des résultats du **A**.
2. En régime stationnaire, établir la solution physiquement acceptable n(x) de l'équation de diffusion dans la barre de graphite.
3. Exprimer, en fonction de C et D, a longueur de diffusion L_D, c'est-à-dire la longueur que doivent parcourir les neutrons dans le graphite pour que leur nombre soit divisé par e (e = 2,718.....). On vérifiera que l'expression de L_D a bien la dimension d'une longueur.

Rappels :

a) $N = \iiint_V n\, dV$

b) Théorème d'Ostrogradski: $\iint_S \overrightarrow{J_n}.\overrightarrow{n}\, dS = \iiint_V \mathrm{div}(\overrightarrow{J_n})\, dV$

c) Equation différentielle ay''+by'+cy = 0, Equation caractéristique: $ar^2+br+c = 0$

   i) solutions réelles r_1 et r_2 : $y(x) = A \exp(r_1 x) + B \exp(r_2 x)$

   ii) solutions complexes r_1 et r_2 : $y(x) = [A \exp(ir_1 x)+ B \exp(ir_2 x)]$